Cahier de notes – App/PC 10

Mme Tarasenco

Exercices 16 à 24

La géométrie cartésienne

Nom : ________________________

Ex 16 : La distance entre deux points

La géométrie cartésienne est l'étude des formes sur un système de coordonnées. On utilise beaucoup l'algèbre pour décrire les formes géométriques.

*Rappel : On utilise un plan cartésien comme système de coordonnées. Les points prennent la forme **(x,y)** et les valeurs de x et de y peuvent être positives ou négatives.*

On peut calculer la distance entre deux points, $A(x_1,y_1)$ et $B(x_2,y_2)$ sur le plan en utilisant la formule suivante, qui est dérivée du théorème de Pythagore :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ex 1 : Trouve la distance entre les points (2,1) et (3,5).

$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (5-1)^2}$$

$$d = \sqrt{(1)^2 + (4)^2}$$

$$d = \sqrt{1 + 16}$$

$$d = \sqrt{17} \approx \boxed{4,1231}$$

Ex 2 : Trouve la distance entre les points (-1,2) et (-6,-3).

$x_1\ y_1\quad x_2\ y_2$

$$d=\sqrt{(-6-(-1))^2+(-3-2)^2}$$

$$d=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}$$

$$d=\sqrt{25+25}$$

$$d=\sqrt{50}\approx\boxed{7{,}0711}$$

Ex 3 : Trouve la distance entre les points $(\sqrt{2},-4)$ et $(2\sqrt{2},-4)$.

$x_1\ y_1\quad x_2\ y_2$

$$d=\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(-4-(-4))^2}$$

$$d=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-4+4)^2}$$

$$d=\sqrt{(\cancel{\sqrt{}}2)^{\cancel{2}}+(0)^2}$$

$$d=\sqrt{2}\approx\boxed{1{,}4142}$$

Ex 4 : Trouve la distance entre les points (0,1;0,2) et (-0,1;-0,2).

$x_1\ y_1\quad x_2\ y_2$

$$d=\sqrt{(-0{,}1-0{,}1)^2+(-0{,}2-0{,}2)^2}$$

$$d=\sqrt{(-0{,}2)^2+(-0{,}4)^2}$$

$$d=\sqrt{0{,}04+0{,}16}$$

$$d=\sqrt{0{,}2}\approx\boxed{0{,}4472}$$

Ex 17 : Le point milieu d'un segment

On appelle **un segment** la ligne entre deux points sur le plan cartésien

On peut calculer le point milieu d'un segment entre deux points, A(x_1,y_1) et B(x_2,y_2) sur le plan en utilisant la formule suivante :

$$pt\ mil = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

En effet, on prend la **moyenne des x** et la **moyenne des y**.

Ex 1 : Quel est le point milieu entre (5,-3) et (-1,9)?

x_1 y_1 x_2 y_2

$$pt.\ mil. = \left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$$

$$pt.\ mil. = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = \boxed{(2,3)}$$

Ex 2 : Quel est le point milieu entre (-10,-2) et (4,-7)?

x_1 y_1 x_2 y_2

$$pt.\ mil. = \left(\frac{-10+4}{2}, \frac{-2+(-7)}{2}\right)$$

$$pt.\ mil. = \left(\frac{-6}{2}, \frac{-9}{2}\right)$$

$$pt.\ mil. = \boxed{\left(-3, -\frac{9}{2}\right)}$$

Ex 3 : Le point milieu de AB est M(8,-2). Soit A(-1,0), trouve les coordonnées de B. (x_2, y_2) $\quad x_1\ y_1$

$$\text{pt. mil.} = \left(\frac{-1+x_2}{2}, \frac{0+y_2}{2}\right)$$

$$= (8, -2)$$

$$\cancel{2}\cdot\frac{-1+x_2}{\cancel{2}} = 8\cdot 2 \qquad \cancel{2}\cdot\frac{0+y_2}{\cancel{2}} = -2\cdot 2$$

$$\cancel{-1}+x_2 = 16 \qquad y_2 = -4$$
$$\cancel{+1} \qquad +1$$

$$x_2 = 17 \qquad \therefore \boxed{B(17,-4)}$$

Ex 4 : Le point milieu de PQ est R(-3,6). Soit Q(-11,-1), trouve les coordonnées de P. (x_2, y_2) $\quad x_1\ y_1$

$$\text{pt. mil.} = \left(\frac{-11+x_2}{2}, \frac{-1+y_2}{2}\right) = (-3,6)$$

$$\cancel{2}\cdot\frac{-11+x_2}{\cancel{2}} = -3\cdot 2 \qquad \cancel{2}\cdot\frac{-1+y_2}{\cancel{2}} = 6\cdot 2$$

$$\cancel{-11}+x_2 = -6 \qquad \cancel{-1}+y_2 = 12$$
$$\cancel{+11} \qquad +11 \qquad \cancel{+1} \qquad +1$$

$$x_2 = 5 \qquad y_2 = 13 \qquad \therefore \boxed{P(5,13)}$$

Ex 18 : La pente

Les droites sont toutes penchées d'un certain degré. On peut mesurer ce penchement et on l'appelle **la pente**. La pente nous donne des informations au sujet de la droite.

Pente positive = augmente vers la droite
Pente négative = diminue vers la droite
Pente nulle = droite horizontale

Pour trouver la pente, il faut trouver le **changement horizontal** et le **changement vertical**.

$$m = \frac{\text{changement vertical}}{\text{changement horizontal}}$$

Pour calculer la pente sur le plan cartésien, il faut connaître deux points, $A(x_1,y_1)$ et $B(x_2,y_2)$. Ils sont soit donnés ou lus sur un graphique. On trouve la différence entre les valeurs de y et x.

On pense : « RISE OVER RUN ».

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Ex 1 : Trouve la pente du segment P(0,1) et Q(3,4).

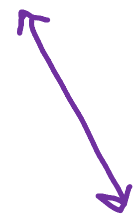
$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{3-0} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

Ex 2 : Trouve la pente du segment : P(-3,2) et Q(2,1).

$x_1 \; y_1 \qquad x_2 \; y_2$

$$m = \frac{1-2}{2-(-3)} = \frac{-1}{2+3} = \boxed{\frac{-1}{5}}$$



Ex 3 : Trouve la pente du segment relié par les points P(-6,-6) et Q(4,-1).

$x_1 \; y_1 \qquad x_2 \; y_2$

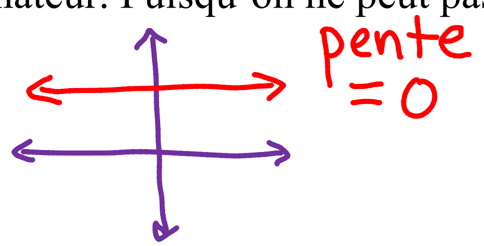
$$m = \frac{-1-(-6)}{4-(-6)} = \frac{-1+6}{4+6} = \frac{5}{10} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

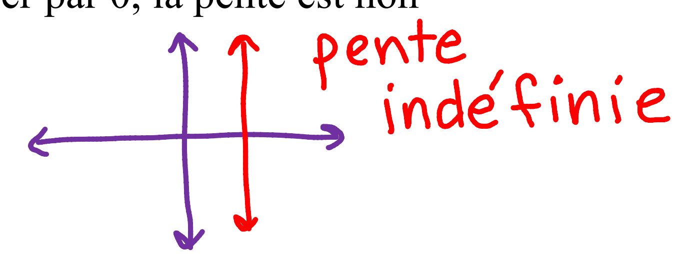
Ex 4 : Trouve la pente du segment relié par les points P(-3,2) et Q(7,10).

$x_1 \; y_1 \qquad x_2 \; y_2$

$$m = \frac{10-2}{7-(-3)} = \frac{8}{7+3} = \frac{8}{10} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

NB : Si une droite est horizontale, le calcul donne 0 au numérateur, et donc pente = 0. Si une droite est verticale, le calcul donne 0 au dénominateur. Puisqu'on ne peut pas diviser par 0, la pente est non-définie.

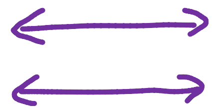




Ex 19 : Parallèle vs. Perpendiculaire

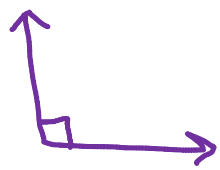
Deux droites qui ne se croisent jamais sont dites **parallèles**. Les droites parallèles ont des pentes égales.

$$\boxed{m_2 = m_1}$$



Deux droites qui se croisent à un angle d'exactement 90° sont dites **perpendiculaires**. Les pentes de deux droites perpendiculaires sont les **réciproques négatifs** de l'un l'autre.

$$\boxed{m_2 = \frac{-1}{m_1}}$$



Ex 1 : La droite CD a une pente de $\frac{1}{2}$. Quelle est la pente d'une droite parallèle à CD?

$$m_2 = m_1$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{2}}$$

m_1

Ex 2 : La droite PQ a une pente de $\frac{1}{4}$. Quelle est la pente d'une droite perpendiculaire à PQ?

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

$$m_2 = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -1 \div \frac{1}{4} = -1 \cdot \frac{4}{1} = \boxed{-4}$$

Ex 3 : La droite HJ a une pente de -3. Quelle est la pente d'une droite perpendiculaire à HJ?

m_1

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

$$m_2 = \frac{-1}{-3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Ex 4 : Quelle est la pente d'une droite qui est perpendiculaire à celle qui passe par les points (0,8) et (3,1)?

$x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$

$$m_1 = \frac{1-8}{3-0} = \frac{-7}{3}$$

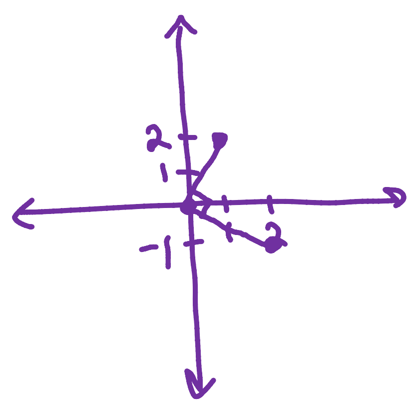
$$\boxed{m_2 = \frac{3}{7}}$$

Ex 5 : Quelle est la pente d'une droite qui est perpendiculaire à celle qui passe par les points (2,5) et (-1,-1)?

$x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$

$$m_1 = \frac{-1-5}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$$

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{2}}$$



Ex 20 : Tracer une droite avec une table de valeurs

Une ligne passe par un nombre infini de points. Chacun de ces points ont des coordonnées (x,y).

Les lignes sur le plan cartésien sont décrites avec **une équation linéaire**. Une équation linéaire possède seulement deux variables, x et y. L'équation nous permet de voir quels points (x,y) font partie de la ligne.

On va voir deux genres d'équations :

Forme pente-point : $y - y_1 = m(x - x_1)$, qui se simplifie à :
Forme pente-ordonnée-à-l'origine : $\boxed{y = mx + b}$

Forme générale : $Ax + By + C = 0$

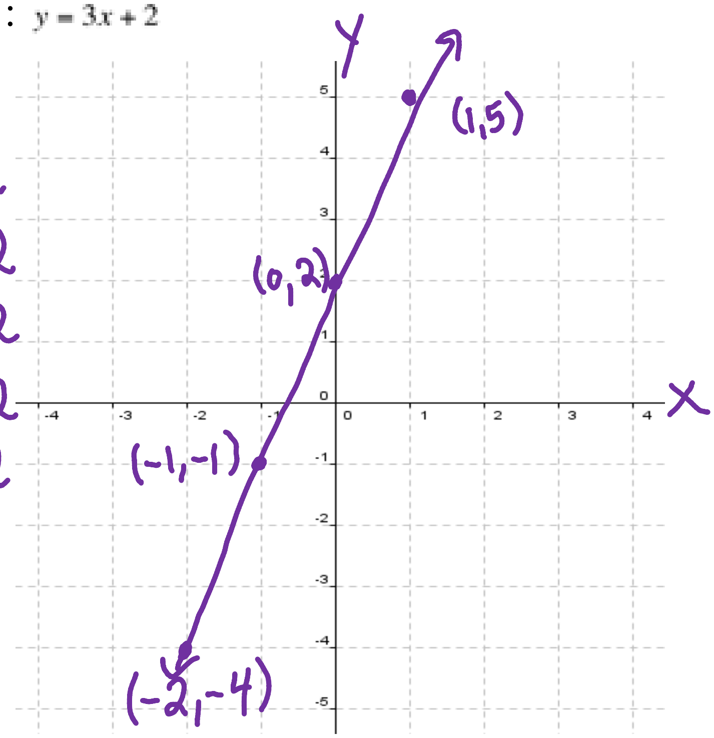
Pour tracer le graphique d'une droite, on utilise une table de valeurs :

1) Choisis des valeurs de x.
2) Pour chacune, remplace x dans l'équation pour trouver y.
3) Trace le point que tu as trouvé sur le graphique.
4) Relie tous les points.

Ex 1 : Trace le graphique de cette droite : $y = 3x + 2$

x	y
-2	-4
-1	-1
0	2
1	5
2	8

$y = 3(-2) + 2$
$y = 3(-1) + 2$
$y = 3(0) + 2$
$y = 3(1) + 2$
$y = 3(2) + 2$



Ex 2 : Trace le graphique de cette droite : $-4x - y + 1 = 0$

$$-4x - \cancel{y} + 1 = 0$$
$$\cancel{+y} \qquad +y$$

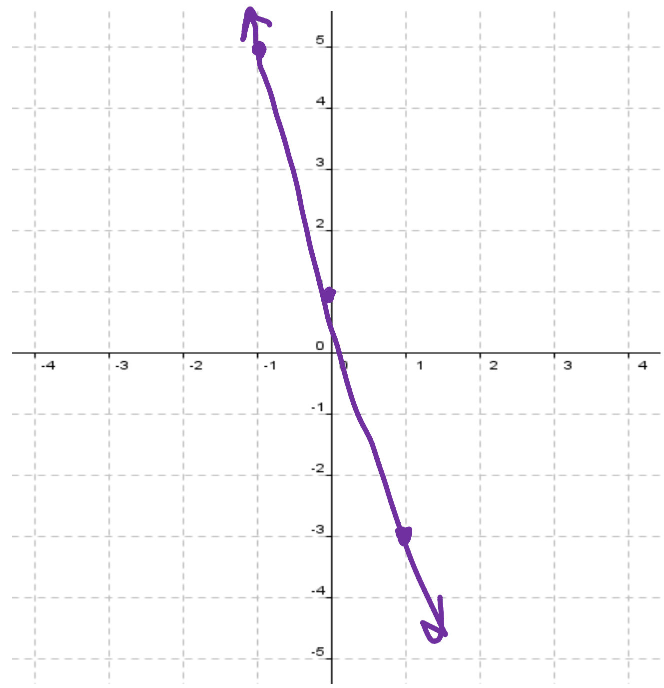
$$-4x + 1 = y$$

$$y = -4x + 1$$

x	y
−2	9
−1	5
0	1
1	−3
2	−7

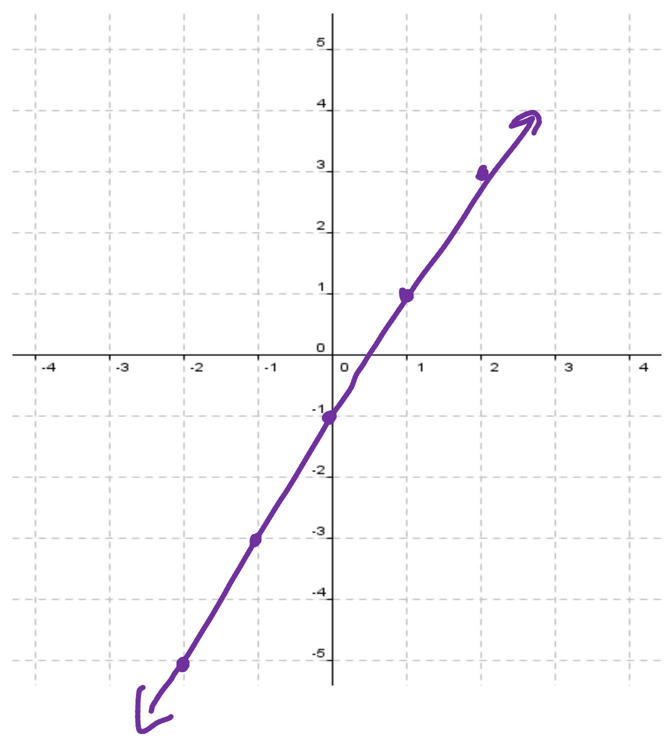
$y = -4(-2) + 1$

⋮

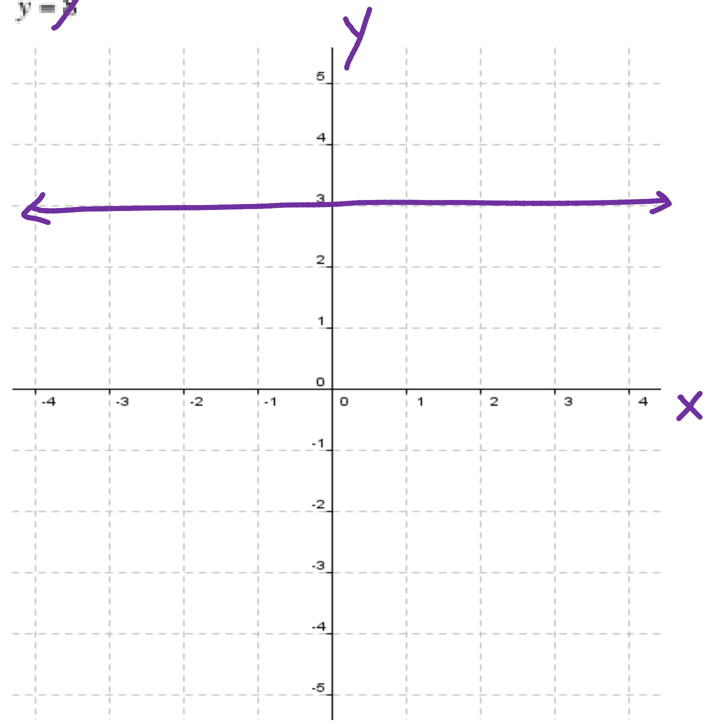


Ex 3 : Trace le graphique de cette droite : $y = 2x - 1$

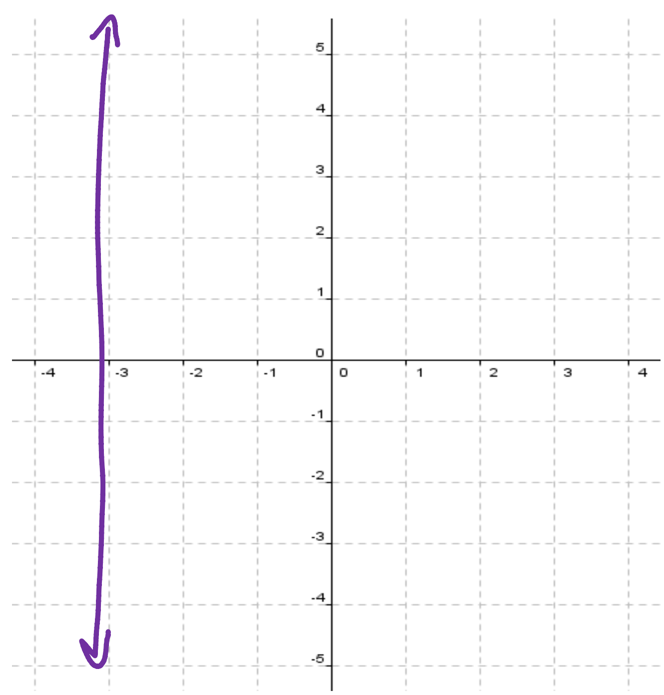
x	y
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
2	3



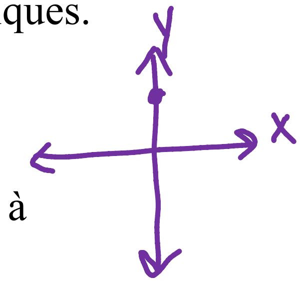
Ex 4 : Trace le graphique de cette droite : $y = \cancel{8}$ 3



Ex 5 : Trace le graphique de cette droite : $x = -3$

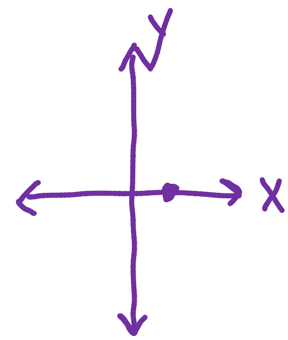


Ex 21 : Tracer une droite avec les coordonnées à l'origine



Toutes les droites passent par les deux axes à deux endroits spécifiques. Les seules exceptions sont les droites horizontales et verticales.

Le point où la droite passe par l'axe des y est appelé **l'ordonnée à l'origine**. À l'ordonnée à l'origine, **x = 0**. On peut voir l'ordonnée à l'origine dans l'équation $y = mx + b$: c'est la **valeur de b**. OXO



Pour trouver l'ordonnée à l'origine :

- Remplace x par 0 dans l'équation.
- Résous pour y.

Le point où la droite passe par l'axe des x est appelé **l'abscisse à l'origine**. À l'abscisse à l'origine, **y = 0**. AYO

Pour trouver l'abscisse à l'origine :

- Remplace y par 0 dans l'équation.
- Résous pour x.

On peut tracer la droite en trouvant les coordonnées à l'origine (ces deux points) et en les liant sur un graphique.

Ex 1 : Trace le graphique de la droite suivante : $y = -3x + \cancel{6}\ 5$

OXO

$y = -3(0) + 5$

$y = 0 + 5$

$y = 5$

$\therefore (0, 5)$

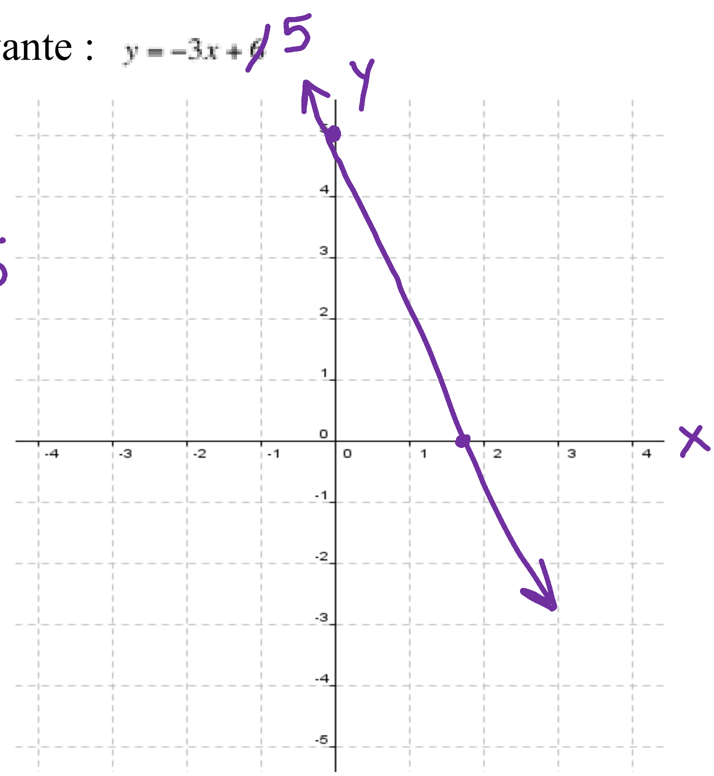
AYO

$0 = -3\cancel{x} + 5$
$+3x \quad +\cancel{3x}$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{5}{3}$

$x = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$

$\therefore \left(\frac{5}{3}, 0\right)$



Ex 2 : Trace le graphique de la droite suivante : $-2x+3y+12=0$

OXO

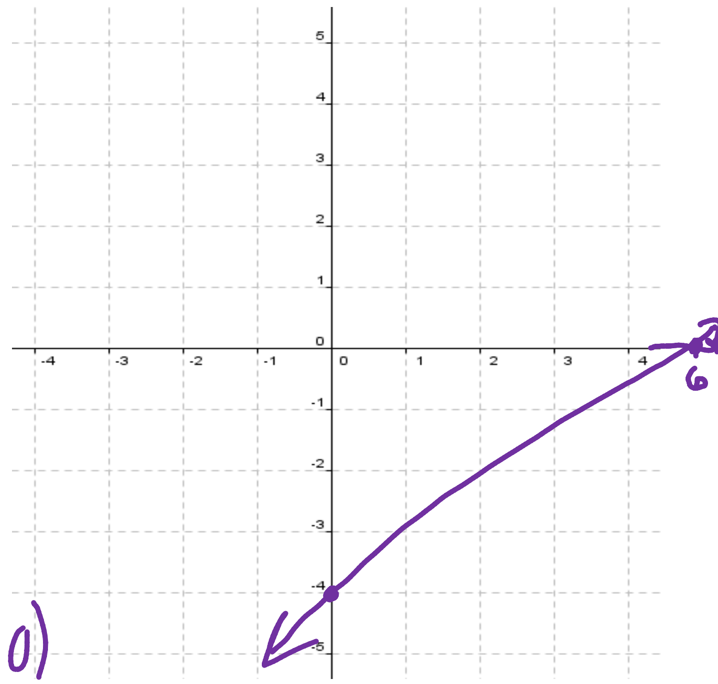
$-2(0)+3y+12=0$

$0+3y+\cancel{12}=0$

$\quad\quad -12 \quad -12$

$\frac{\cancel{3}y}{\cancel{3}} = \frac{-12}{3} \rightarrow y=-4$

$\therefore (0,-4)$



AYO

$-\cancel{2x}+3(0)+12=0$

$+\cancel{2x} \quad\quad +2x$

$\frac{12}{2}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \rightarrow 6=x \therefore (6,0)$

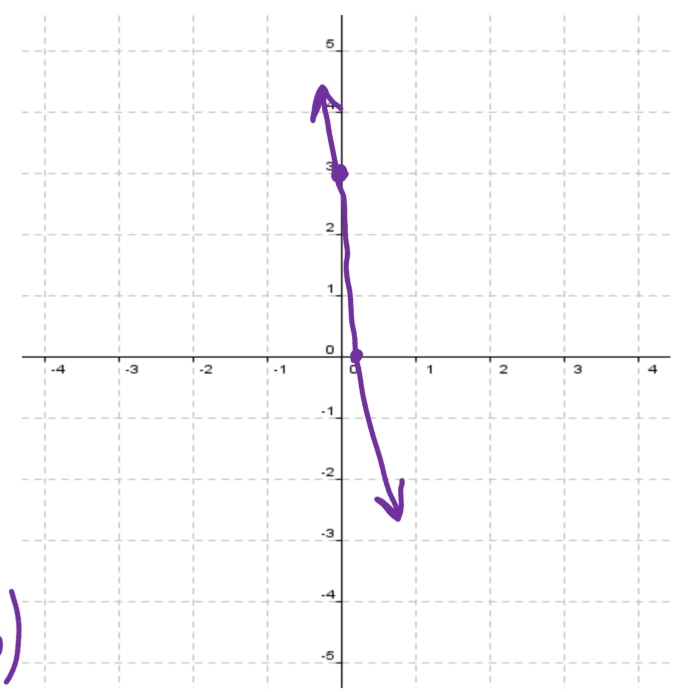
Ex 3 : Trace le graphique de la droite suivante : $y=-9x+3$

OXO

$y=-9(0)+3$

$y=3$

$\therefore (0,3)$



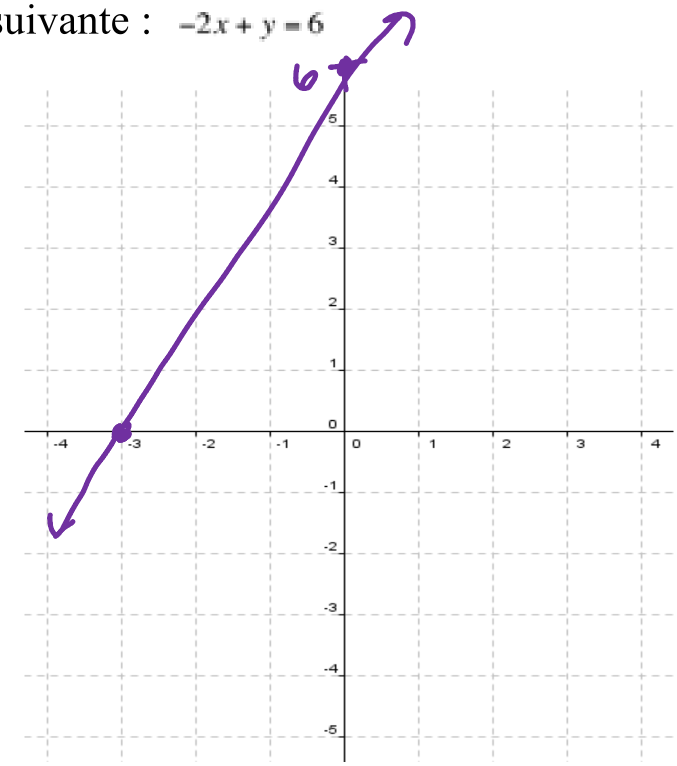
AYO

$0=-\cancel{9x}+3$

$+9x \quad +\cancel{9x}$

$\frac{\cancel{9}x}{\cancel{9}}=\frac{3}{9} \rightarrow x=\frac{1}{3} \therefore \left(\frac{1}{3},0\right)$

Ex 4 : Trace le graphique de la droite suivante : $-2x+y=6$



AYO

$-2x+0=6$

$\frac{-\cancel{2}x}{-\cancel{2}} = \frac{6}{-2}$

$x=-3 \quad \therefore (-3,0)$

OXO

$-2(0)+y=6$

$y=6 \quad \therefore (0,6)$

Ex 22 : Tracer une droite avec pente et point.

Il y a trois méthodes pour tracer une droite :

1) *Table de valeurs*
2) *Coordonnées à l'origine*
3) *Pente et point*

$y = mx + b$

pente $\left(\frac{\text{RISE}}{\text{RUN}}\right)$

oxo

Si on connaît la pente d'une droite et un point sur la droite, on peut tracer le graphique.

Avec la pente, on pense : « RISE OVER RUN ». Le numérateur donne le « RISE », donc le changement de y, et le dénominateur donne le « RUN », le changement de x. En partant d'un point, on change x et y selon la pente pour trouver un deuxième point.

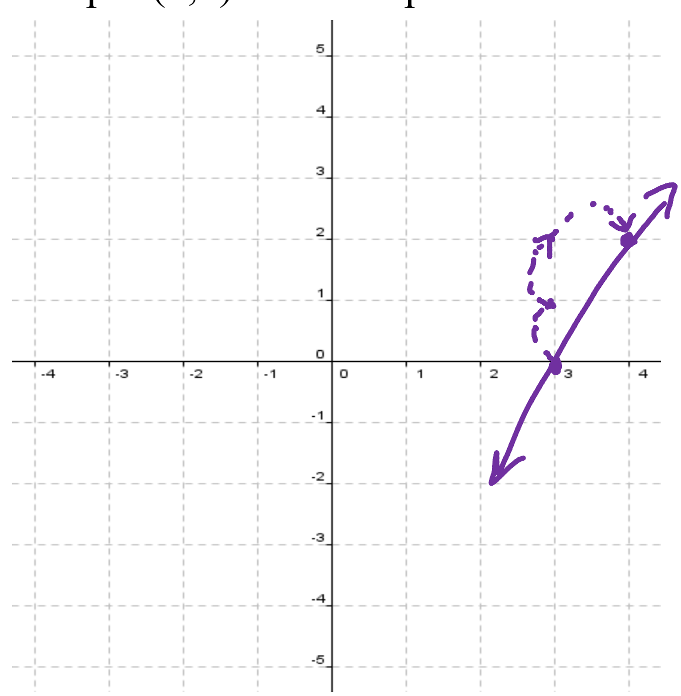
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Comment?

1) Trace le point sur le plan.
2) Trouve les changements de x et y dans la pente.
3) Trace le deuxième point.
4) Relie les points avec une règle.

Ex 1 : Trace le graphique d'une droite qui passe par (3,0) avec une pente de 2.

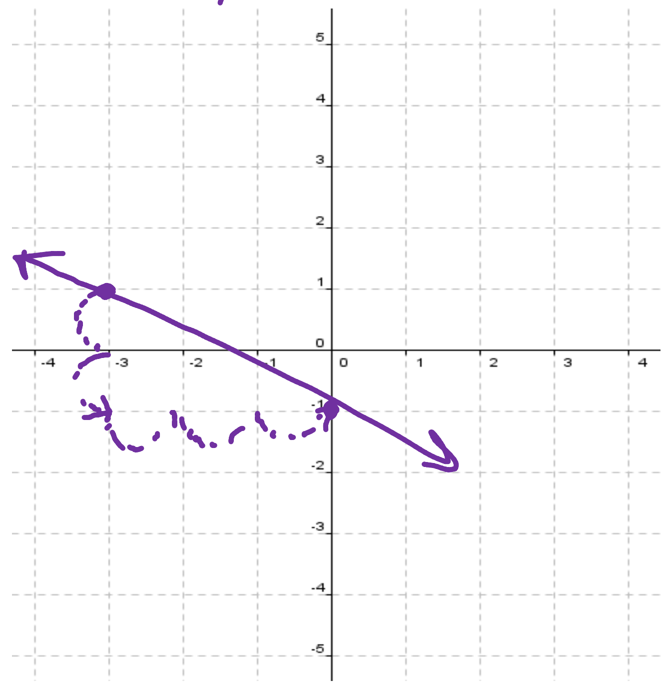
$m = 2 = \frac{2}{1}$



Ex 2 : Trace le graphique d'une droite qui passe par (-3,1) avec une pente de $-\frac{2}{3}$.

x y

$m = \frac{-2}{3}$

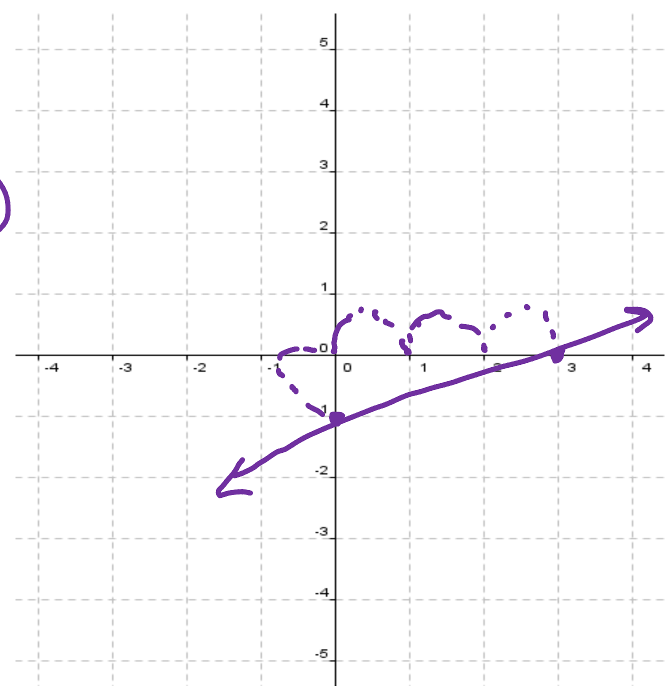


$y = mx + b$

Ex 3 : Trace le graphique de l'équation $y = \frac{1}{\cancel{4}\;3}x - 1$.

$m = \frac{1}{3}$

$b = -1 \rightarrow$ oxo : $(0,-1)$

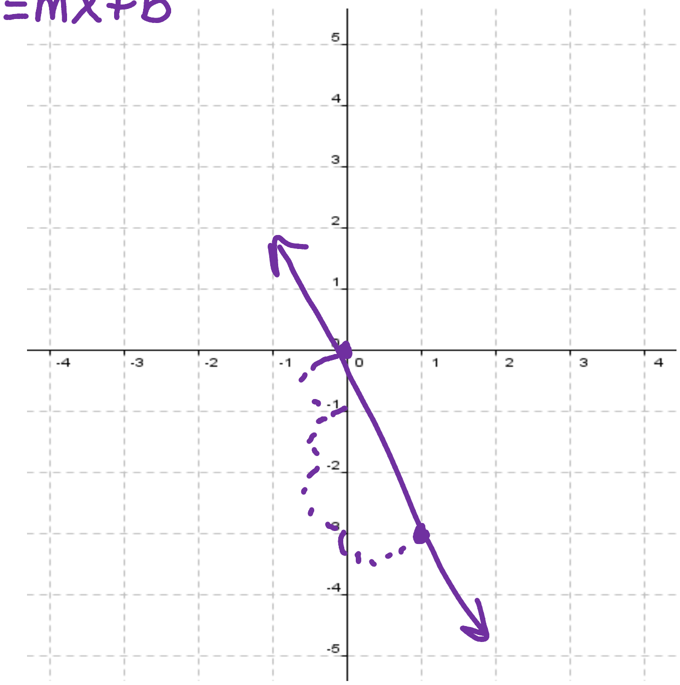


Ex 4 : Trace le graphique de l'équation $y = -3x$.

$y = mx + b$

$m = -3 = \frac{-3}{1}$ ↓ →

$b = 0 \rightarrow 0 \times 0 : (0,0)$



Ex 23 : Trouver l’équation d’une droite

A) Pente et ordonnée à l’origine

Si on connaît la pente et l’ordonnée à l’origine, on peut trouver l’équation de la droite.

Dans $y = mx + b$:

Nous insérons la valeur de la pente, m.
Nous insérons la valeur de l’ordonnée à l’origine, b.

B) Pente et point

Si on connaît la pente et un point sur la droite, on peut trouver l’équation de la droite.

Dans $y - y_1 = m(x - x_1)$:

Nous insérons la valeur de la pente, m.
Nous insérons les coordonnées du point connu comme (x_1, y_1)
Nous énonçons l’équation dans la bonne forme.

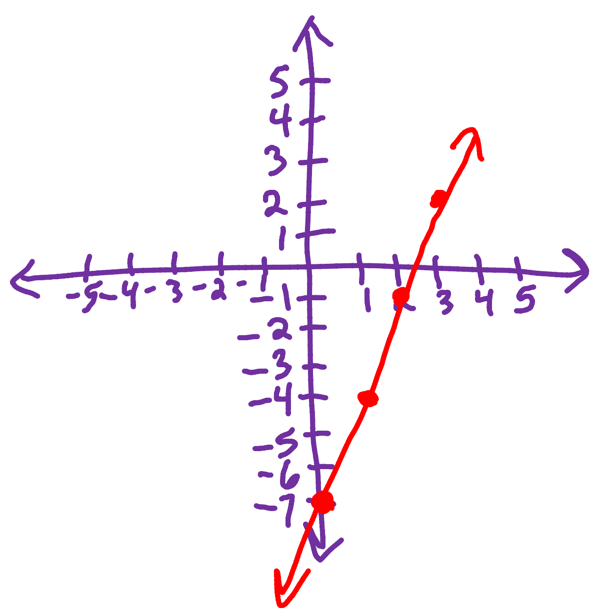
Ex 1 : Quelle est l’équation de la droite ayant une pente de 3 et un ordonnée à l’origine à -7?

m

b

$y = mx + b$

$\boxed{y = 3x - 7}$



Ex 2 : Quelle est l’équation de la droite ayant une pente de $-\frac{2}{3}$ et un ordonnée à l’origine à 5?

m

b

$$y = mx + b$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + 5}$$

Ex 3 : Quelle est l’équation de la droite qui passe par (-6, -1) et qui a une pente de $\frac{-1}{2}$?

x_1 y_1

m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - (-6))$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 6)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{6}{2} - 1$$

$$-1$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 3 - 1$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 4}$$

Ex 4 : Quelle est l’équation de la droite qui passe par (5, 0) et qui a une pente de -2?

x y

m

$$y = mx + b$$

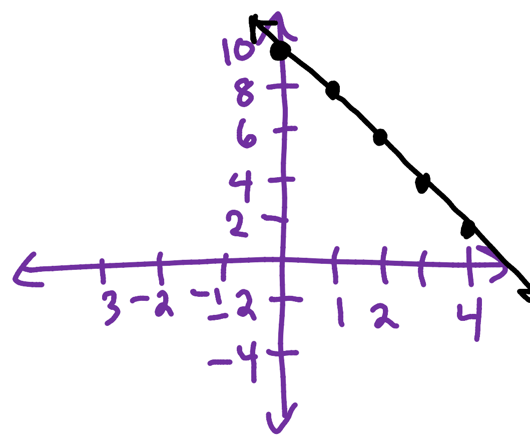
$$0 = -2(5) + b$$

$$0 = -10 + b$$

$$+10 \quad +10$$

$$10 = b$$

$$\boxed{y = -2x + 10}$$



Ex 24 : Équation générale

On trouve l'équation à partir de deux points. On peut ensuite la convertir en forme générale $Ax + By + C = 0$.

Dans la forme générale, on veut A positif, et on ne veut pas avoir des fractions.

Comment?

1) Trouve la pente.
2) Remplace la pente et un des points dans $y - y_1 = m(x - x_1)$
3) Réarrange pour avoir la forme générale.

Ex 1 : Quelle est l'équation générale de la droite qui passe par $(2,-4)$ et $(4,0)$?

$x_1\ y_1$

$x_2\ y_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-4)}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-(-4) = 2(x-2)$$

$$y+4 = 2x-4$$

$$-y-4 \quad -y-4$$

$$\boxed{0 = 2x - y - 8}$$

Ex 2 : Quelle est l'équation générale de la droite qui passe par $(-3,-1)$ et $(1,7)$?

$x_1\ y_1$

$x_2\ y_2$

$$m = \frac{7-(-1)}{1-(-3)}$$

$+$ $+$

$$m = \frac{8}{4}$$

$$m = 2$$

$$y-(-1) = 2(x-(-3))$$

$$y+1 = 2(x+3)$$

$$y+1 = 2x+6$$

$$-y-1 \quad -y-1$$

$$\boxed{0 = 2x - y + 5}$$

Ex 3 : Quelle est l'équation générale de la droite qui passe par (2,2) et (-3,-1)?

$x_1 \; y_1$

$x_2 \; y_2$

$m = \frac{-1-2}{-3-2}$

$m = \frac{-3}{-5}$

$m = \frac{3}{5}$

$5 \cdot \; y - 2 \overset{5\cdot}{=} \frac{3}{\cancel{5}}(x-2)$

$5(y-2) = 3(x-2)$

$5y - 10 = 3x - 6$

$-5y + 10 \quad -5y + 10$

$\boxed{0 = 3x - 5y + 4}$

Ex 4 : Quelle est l'équation de la droite perpendiculaire à $y = -\frac{1}{4}x + 5$ et qui passe par (5,5)?

$x_1 \; y_1$

$m_1 = -\frac{1}{4}$

$m_2 = 4$

$y - 5 = 4(x-5)$

$y - 5 = 4x - 20$

$-y + 5 \quad -y + 5$

$\boxed{0 = 4x - y - 15}$

Ex 5 : Quelle est l'équation de la droite perpendiculaire à $y = 2x - 4$ et qui passe par (0,-3)?

$x_1 \; y_1$

$m_1 = 2$

$m_2 = -\frac{1}{2}$

$2 \cdot \; y - (-3) \overset{2\cdot}{=} -\frac{1}{\cancel{2}}(x-0)$

$2(y+3) = -1(x)$

$2y + 6 = -x$

$+x \quad +x$

$\boxed{x + 2y + 6 = 0}$