Cahier de notes – App/PC 10

Mme Tarasenco

Exercices 11 à 15

Les polynômes et la factorisation

Nom : ______________________

Ex 11 : Facteurs communs des polynômes

Polynôme; expression à plusieurs termes. Ex : $3x^4 - 2x^3 + 4x - 2$

Monôme; expression à un terme. Ex : $5x$

Binôme; expression à deux termes. Ex : $2x - 4$

Trinôme; expression à trois termes. Ex : $x^2 + 9x + 14$

On peut appliquer ce que nous avons appris au sujet des facteurs communs aux polynômes.

Pour factoriser un polynôme, on trouve le plus grand facteur commun (~~PGCF~~) pour tous les termes et on le sort.
PGFC

NB : On sort le PGFC des coefficients et constantes, et la variable avec l'exposant le plus petit qui est en commun

Au besoin, utilise des carreaux algébriques.

a) Dessine les termes en carreaux.
b) Forme un rectangle.
c) Utilise les côtés pour trouver les facteurs.

Factorise les polynômes suivants :

Ex 1 : $5x + 20$

PGFC de 5 et 20 : 5

$5(x+4)$

$5x$

20

Ex 2 : $4x^2 + 16x$

PGFC de 4 et 16 : 4

PGFC de x^2 et x : x

$$4x(x + 4)$$

$4x^2$

$16x$

Ex 3 : $30x^2y - 24xy^3$

$30 \rightarrow$

1	30
2	15
3	10
5	6

$24 \rightarrow$

1	24
2	12
3	8
4	6

PGFC de 30 et 24 : 6

PGFC de x^2 et x : x

PGFC de y et y^3 : y

$$6xy(5x - 4y^2)$$

$30x^2y$

$-24xy^3$

Ex 4 : $3x^2 + 30x + 63$

PGFC de 3, 30 et 63 : 3

$$3(x^2 + 10x + 21)$$

$3x^2$

$30x$

63

Parfois le facteur en commun est un binôme :

Ex 5 : $4x(x-4)+3(x-4)$

PGFC : $(x-4)$

$$(x-4)(4x+3)$$

$4x(x-4)$

$3(x-4)$

Ex 6 : $y^2(y+2)-3(y+2)$

PGFC : $(y+2)$

$$(y+2)(y^2-3)$$

Ex 7 : $2x^2+6y+4x+3xy$

$$\underbrace{2x^2+4x}+\underbrace{6y+3xy}$$

$$2x(x+2)+3y(2+x)$$

$$(x+2)(2x+3y)$$

p. 154 #5-10, 12

Ex 12 : Développement et simplification des polynômes

A) Simplifier des expressions

Une expression mathématique est écrite avec des termes ayant des coefficients et des variables. **Dans une expression, il n'y a pas de signe d'égalité** (=).

Pour simplifier, on groupe les termes de la même variable ensemble et on additionne les coefficients.

Si nous connaissons les valeurs des variables, on peut substituer et résoudre.

Ex 1 : $2x + 4y - x + 6y - 5x$

$\boxed{-4x + 10y}$

Ex 2 : Évalue $5x^2 + 2y - x - 4y$ si $x = 1$ et $y = 3$.

$5x^2 - 2y - x$

$5(1)^2 - 2(3) - 1$

$5 - 6 - 1$

$\boxed{-2}$

Ex 3 : $(3x + 5y) + (-2x - 6y)$

$3x + 5y - 2x - 6y$

$\boxed{x - y}$

Ex 4 : $4x^2 + 6x + y - x + 2y - x^2$

$\boxed{3x^2 + 5x + 3y}$

Ex 5 : Trois amis se réunissent pour un piquenique. Annick amène trois sandwichs et quatre pommes. Pierre amène cinq sandwichs et trois pommes. Sonya n'amène rien mais elle mange deux sandwichs et une pomme aussitôt qu'elle arrive. Combien de sandwichs et de pommes restent?

s : sandwichs p : pommes

$3s + 4p + 5s + 3p - 2s - p$

$6s + 6p$

$\therefore$ 6 sandwichs et 6 pommes

B) Multiplier des polynômes

Pour multiplier des polynômes, il faut multiplier chaque terme du premier polynôme avec chaque terme du deuxième.

Pour multiplier des binômes, tu peux utiliser l'acronyme **PIED** : premiers, intérieurs, extérieurs, derniers.

Ex 1 : $(3x+2)(x-6)$

$3x^2-18x+2x-12$

$\boxed{3x^2-16x-12}$

Ex 2 : $(x-5)(2x^2+3x-4)$

$2x^3+3x^2-4x-10x^2-15x+20$

$\boxed{2x^3-7x^2-19x+20}$

Ex 3 : $(2y+1)^3$

$(2y+1)(2y+1)(2y+1)$

$(4y^2+2y+2y+1)(2y+1)$

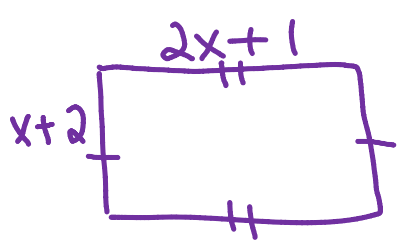
$(4y^2+4y+1)(2y+1)$

$8y^3+4y^2+8y^2+4y+2y+1$

$\boxed{8y^3+12y^2+6y+1}$

Ex 4 : Le terrain chez Philippe mesure $(x+2)$ par $(2x+1)$. Quelle est la superficie de son terrain?

aire



$S=(x+2)(2x+1)$

$S=2x^2+x+4x+2$

$\boxed{S=2x^2+5x+2}$

Ex 13 : Factorisation $ax^2 + bx + c$ où $a = 1$

Avec un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ où $a = 1$, nous pouvons le décomposer en deux binômes (factorisation).

Le but est de trouver deux nombres qui te donne un produit égal à c et une somme égale à b.

$\times$

$+$

Factorise les trinômes suivants :

Ex 1 : $x^2 + 6x + 8$

$\boxed{(x+2)(x+4)}$

P (8)	S (6)
$1 \cdot 8$	$1+8=9$ ✗
$(-1)\cdot(-8)$	$(-1)+(-8)=-9$ ✗
$2 \cdot 4$	$2+4=6$ ✓
$(-2)\cdot(-4)$	

V: $(x+2)(x+4)$

$x \cdot x = x^2$ $\quad 2 \cdot x = 2x$

$x \cdot 4 = 4x$ $\quad 2 \cdot 4 = 8$

$x^2 + \underline{4x} + \underline{2x} + 8 = x^2 + 6x + 8$ ✓

Ex 2 : $x^2 + 4x - 5$

$\boxed{(x-1)(x+5)}$

(-5) P	S (4)
$1 \cdot (-5)$	$1-5=-4$ ✗
$(-1)\cdot 5$	$-1+5=4$ ✓

Ex 3 : $3x^2 + 3x - 18$

$3(x^2+x-6)$

$\boxed{3(x-2)(x+3)}$

P (-6)	S (1)
$1 \cdot (-6)$	$1-6=-5$ ✗
$(-1)\cdot 6$	$-1+6=5$ ✗
$2 \cdot (-3)$	$2-3=-1$ ✗
$(-2)\cdot 3$	$-2+3=1$ ✓

NB : Il faut factoriser le facteur en commun en premier s'il existe.

Ex 4 : $x^2 - 7x + 12$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 12 \\ 1 & 2 \\ & 6 \end{array}$$

$-3 + (3)$

$-4 \quad (4)$

$$\boxed{(x-4)(x-3)}$$

Ex 5 : $x^2 - 7x - 30$

$$\begin{array}{c} 30 \\ \hline 2 \\ 15 \\ \hline 3 + \\ -10 \\ \hline 5 \\ 6 \end{array}$$

$$\boxed{(x-10)(x+3)}$$

Ex 6 : $x^2 - 24x + 80$

$-20 +$

-4

$$\boxed{(x-4)(x-20)}$$

NB : C'est parfois plus facile et plus rapide de trouver les nombres mentalement.

p.166 #7, 11

p.167 #14-15, 17, 19-21

Ex 14 : Factorisation $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 1$

Nous allons encore factoriser en deux binômes utilisant la même stratégie qu'en Ex 13.

Factorise les trinômes suivants :

Ex 1 : $2x^2 + 7x + 3$

STAR TREK!

$$\underbrace{2x^2+x}+\underbrace{6x+3}$$

$$x(2x+1)+3(2x+1)$$

$$(2x+1)(x+3)$$

P	S
$3\cdot 2 = 6$	7
$1\cdot 6$	$1+6=7$ ✓
$(-1)\cdot(-6)$	
$2\cdot 3$	
$(-2)\cdot(-3)$	

Ex 2 : $3x^2 - x - 2$

$$\underbrace{3x^2-3x}+\underbrace{2x-2}$$

$$3x(x-1)+2(x-1)$$

$$(x-1)(3x+2)$$

P	S
$3(-2) = -6$	-1
$(-3)(2)$	$-3+2=-1$

Ex 3 : $2x^2 - 11x + 5$

$$\underbrace{2x^2-x}\underbrace{-10x+5}$$

$$x(2x-1)-5(2x-1)$$

$$(2x-1)(x-5)$$

P	S
$2\cdot 5 = 10$	-11
$(-1)(-10)$	$-1-10=-11$

Ex 4 : $5x^2 + 9x + 4$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 5 & \times & 4 \\ & & 2 \\ & & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} (5) \\ (4) \end{array}$$

$(x+1)(5x+4)$

Ex 5 : $4x^2 + 4x - 15$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 4 & & 15 \\ 2 & \times & -3 \\ 2 & \times & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} (-6) \\ (10) \end{array}$$

$(2x-3)(2x+5)$

Ex 6 : $4x^2 - \overset{16}{\cancel{19}}x + 12$

$4(x^2 - 4x + 3)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ 1 & & -3 \end{array}$$

$4(x-1)(x-3)$

p. 177 #12,13

p. 178 #15-20

Ex 15 : Factorisation d'expressions particulières

Parfois, une expression peut être factorisée même si elle n'a pas de facteur commun, ni est de la forme $ax^2 + bx + c$.

A) Différence de carrés

C'est une expression de la forme $(a^2 - b^2)$.

Pour factoriser, on fait la racine carré de chaque terme et on écrit l'expression $(a - b)(a + b)$.

NB : On ignore le signe négatif au milieu

Factorise les binômes suivants :

Ex 1 : $x^2 - 16$

$\sqrt{x^2} = x$

$\sqrt{16} = 4$

$(x+4)(x-4)$

Ex 2 : $4x^2 - 25$

$\sqrt{4x^2} = 2x$

$\sqrt{25} = 5$

$(2x+5)(2x-5)$

Ex 3 : $9x^4 - y^2$

$\sqrt{9x^4} = 3x^2$

$\sqrt{y^2} = y$

$(3x^2+y)(3x^2-y)$

Ex 4 : $16x^2 - 1$

$\sqrt{16x^2} = 4x$

$\sqrt{1} = 1$

$(4x+1)(4x-1)$

Ex 5 : $49 - 4x^4$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{4x^4} = 2x^2$

$(7+2x^2)(7-2x^2)$

Ex 6 : $121x^2 - 81y^4$

$\sqrt{121x^2} = 11x$

$\sqrt{81y^4} = 9y^2$

$(11x+9y^2)(11x-9y^2)$

B) Trinôme carré parfait

C'est le trinôme qui sort quand on prend le carré d'un binôme :

$$(a + b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

On peut factoriser si :

i. Le premier et le dernier terme sont des carrés parfaits.
ii. Le terme au milieu est le double du produit des racines carrées du premier et du dernier terme

Pour factoriser, on prend les racines carrées du premier et du dernier terme et on écrit $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$. Le signe du deuxième terme du trinôme indique le signe de la factorisation.

Ex 1 : $x^2 + 12x + 36$

$\hookrightarrow 2 \cdot x \cdot 6$

$\sqrt{x^2} = x$

$\sqrt{36} = 6$

$(x + 6)^2$

Ex 2 : $25 - 10y + y^2$

$\hookrightarrow 2 \cdot 5 \cdot y$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{y^2} = y$

$(5 - y)^2$

Ex 3 : $4x^2 + 4xy + y^2$

$\hookrightarrow 2 \cdot 2x \cdot y$

$\sqrt{4x^2} = 2x$

$\sqrt{y^2} = y$

$(2x + y)^2$

Ex 4 : $25x^2 + 40x + 16$

$\hookrightarrow 2 \cdot 5x \cdot 4$

$\sqrt{25x^2} = 5x$

$\sqrt{16} = 4$

$(5x+4)^2$

Ex 5 : $4y^2 - 44\cancel{x}\,y + 121$

$\hookrightarrow 2 \cdot 2y \cdot 11$

$\sqrt{4y^2} = 2y$

$\sqrt{121} = 11$

$(2y-11)^2$

Ex 6 : $9x^2 - 30xy + 25y^2$

9		25	
3	—	−5	(−15)
3	—	−5	(−15)

$(3x-5y)(3x-5y)$

$(3x-5y)^2$

p. 194 #4–13